



SERWIS EDUKACYJNO - INŻYNIERSKI

www.e-MECHANiK.com.pl

MATURA STUDIA PRAKTYKA PRACA

KOMPLEKSOWE WSPARCIE EDUKACYJNE NA KAŻDYM ETAPIE KSZTAŁCENIA INŻYNIERSKIEGO

Matematyka ; Fizyka ; Algebra z geometrią analityczną ; Analiza matematyczna I, II, III ; Mechanika I, II, III ; Mechanika płynów ; Mechanika analityczna ; Mechanika kwantowa ; Mechanika Techniczna ; Wytrzymałość materiałów I, II, III ; Równania różniczkowe ; PKM I, II ; Podstawy konstrukcji maszyn ; TMM ; Teoria mechanizmów i manipulatorów ; AiSUK ; Analiza i synteza układów kinematycznych ; PPM ; Podstawy projektowania mechanizmów (maszyn) ; PPST ; Podstawy projektowania środków transportu ; Manipulatory ; Automatyka i robotyka ; Synteza mechanizmów ; Modelowanie układów wieloczołonowych ; Grafika inżynierska 2D i 3D ; maszyny CNC ; konsultacje prac inżynierskich i magisterskich kierunków studiów technicznych ; współpraca z przemysłem.

KURSY INDYWIDUALNE ORAZ GRUPOWO I ON-LINE

email: kontakt@e-mechanik.com.pl

web: www.e-MECHANiK.com.pl

fb: facebook.com/kontakt.emechanik

tel: **(+48) - 697-154-075**

skype: **e-MECHANiK**

| | | | | | | | |
|------------|------------------|--------------|-----------------------|-----------------|---------------|------------------|-------------------|
| e-MECHANiK | inż. Szymon Flis | Rybná 716/24 | Praha 1 (Staré Město) | Česká Republika | IČO: 06032168 | DIČ: CZ684184253 | (+48)-697-154-075 |
|------------|------------------|--------------|-----------------------|-----------------|---------------|------------------|-------------------|

WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW I, II

ZGINANIE BELEK STATYCZNIE WYZNACZALNYCH

PROJEKT

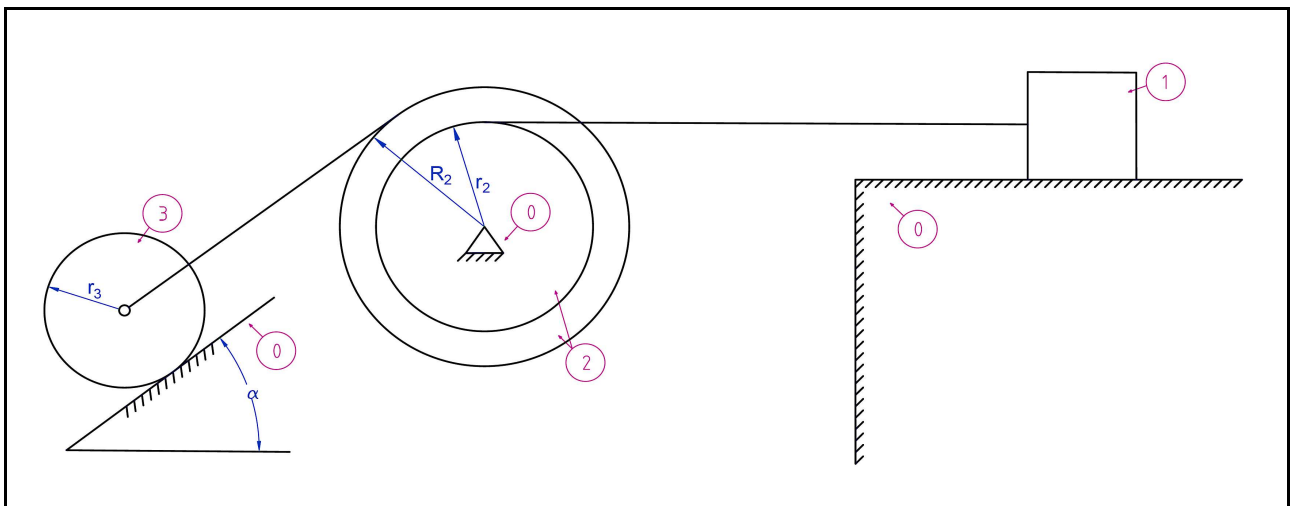
Dla zadanego schematu strukturalnego oraz rodzaju obciążenia belkowego ustroju nośnego, znaleźć:

1) Parametry statyczne:

- wykresy momentu gnącego w funkcji odległości.
- wykresy siły tnącej w funkcji odległości.
- wykresy siły osiowej w funkcji odległości.
- minimalne parametry geometryczne przekroju, tak by przeniósł on zadane obciążenie.
- naprężenie w punkcie C'.
- strzałkę ugięcia w punkcie C.
- kąt ugięcia w punkcie C.

DANE

- długość belki.
- kąt nchylenia siły P.
- siła P, q.
- moment M.
- moduł Younga materiału belki E.
- stała materiałowa na rozciąganie oraz zginanie k_r , k_g .



Rys. 1. Dynamika układu brył sztywnych.

ZAD. 1P

DANE:

$$l = 1 \text{ (m)} \quad ; \quad |AC| = \frac{1}{2}l \quad ; \quad \alpha = 30^\circ$$

$$P = 12000 \text{ (kg)}$$

$$q = 5000 \text{ (kg/m)}$$

$$\gamma_r = \gamma_g = 1200 \text{ (kg/cm}^3\text{)}$$

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ (kg/cm}^2\text{)}$$

$$M = 2ql^2 = 10000 \text{ (kgm)}$$

W:

$$M_g(x) = ?$$

$$T(x) = ?$$

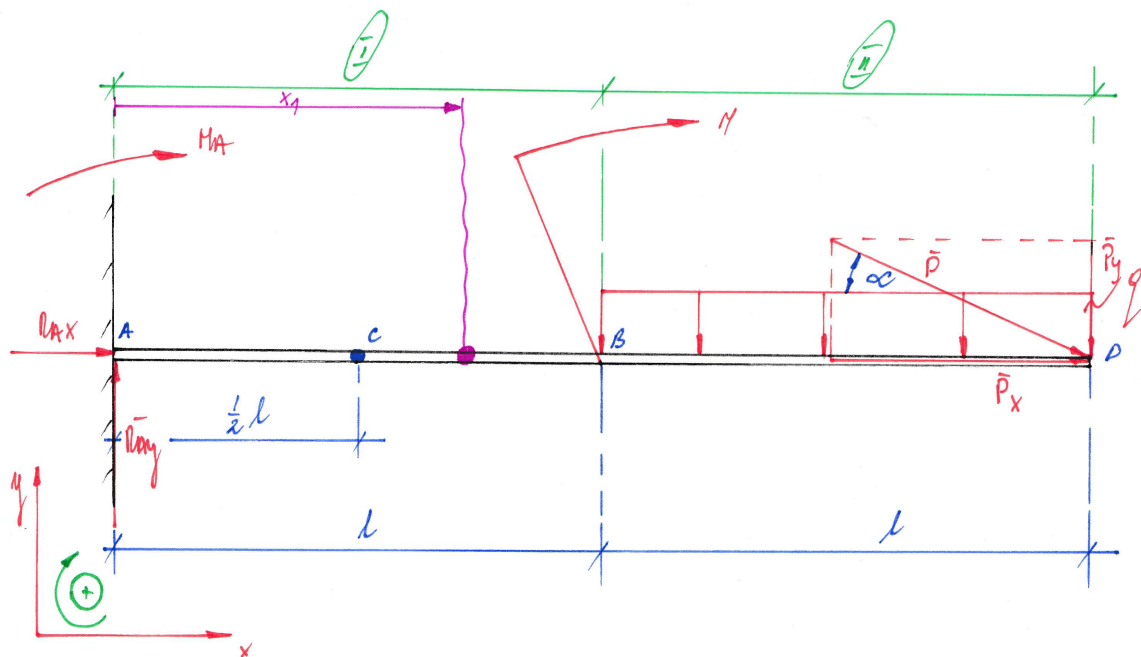
$$v(x) = ?$$

$$a_{min} = ?$$

$$\sigma_{gc} = ?$$

$$\theta_c = ?$$

$$f_c = ?$$



1) wyznaczenie reakcji i wyznaczenie wartości;

$$e = 3t$$

$$s = s \cdot l$$

$$w = P_j$$

$$\left. \begin{matrix} t = l \\ e = 3 \end{matrix} \right\}$$

2) warunki:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_{ix} = 0 \\ \sum F_{iy} = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{array} \right.$$

→

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{Ax} + P_x = 0 \\ R_{Ay} - P_y - q \cdot l = 0 \\ M_A + M + P_y \cdot 2l + q \cdot l \cdot 1.5l = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{P_x}{P} = \cos \alpha \Rightarrow P_x = P \cos \alpha \\ \frac{P_y}{P} = \sin \alpha \Rightarrow P_y = P \sin \alpha \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow R_{Ax} = -P_x = -P \cos \alpha$$

$$M_A = -M - 2l \cdot P \sin \alpha - 1.5ql^2$$

$$M_A = -M - 2Pl \sin \alpha - 1.5ql^2$$

$$R_{Ay} = P_y + ql = P \sin \alpha + ql$$

SPR.

$$\boxed{\sum M_{H3} = 0} \Rightarrow M_A + R_{Ay} \cdot l + \Pi + P_y \cdot l + \varphi l \cdot \frac{1}{2} l = 0$$

$$- \Pi - 2P \sin \alpha - 1,5 \varphi l^2 + P \sin \alpha + \varphi l^2 + \Pi + P \sin \alpha + 0,5 \varphi l^2 = 0$$

$$\underbrace{L = P}_{\checkmark}$$

u REAKCJE REAKCJE REAKCJE

$$\Rightarrow R_{Ax} = -P \cos \alpha = -12000 \cdot \cos 30^\circ = -10392,3$$

$$\Rightarrow \boxed{R_{Ax} = -10392,3}$$

$$\begin{aligned} R_{Ay} &= P \sin \alpha + \varphi l = 12000 \sin 30^\circ + 9000 \cdot l = \\ &= 6000 + 9000 = 11000 \Rightarrow \boxed{R_{Ay} = 11000} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_A &= -\Pi - 2P \sin \alpha - 1,5 \varphi l^2 = -10000 - 2 \cdot 12000 \sin 30^\circ \\ &\quad - 1,5 \cdot 9000 \cdot (1)^2 = -10000 - 12000 - 7500 = -29500 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{M_A = -29500}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} R_{Ax} = -10392,3 \\ R_{Ay} = 11000 \end{array}} \quad \text{(kN)} \quad ; \quad M_A = -29500 \quad \text{(kNm)}$$

3) przewidywania:

I:

$$0 \leq x_1 \leq l = L$$

$M(x)$

$$M_g(x) = R_{Ay} \cdot x_1 + M_A = 11000 x_1 - 29500$$

$N(x)$

$$M_g(0) = -29500$$

$$M_g(1) = -18500$$

$$T(x_1) = R_{Ay} = 11000$$

$N(x)$

$$T(0) = T(1) = 11000$$

$$N(x_1) = -R_{Ax} = -(-10392,3) = +10392,3$$

$$N(0) = N(1) = +10392,3$$

II:

$$l=1 \leq x_2 \leq l=2$$

$$\begin{aligned} M_g(x_2) &= M_g^I + M - q(x_2-1) \cdot \frac{1}{2}(x_2-1) = \\ &= 11000 x_2 - 29500 + 10000 - \frac{1}{2} \cdot 9000 (x_2-1)^2 = \\ &= 11000 x_2 - 19500 - 2500 (x_2^2 - 2x_2 + 1) = \\ &= 11000 x_2 - 19500 - 2500 x_2^2 + 5000 x_2 - 2500 = \\ &= -2500 x_2^2 + 16000 x_2 - 22000 \end{aligned}$$

$$M_g(1) = -8500$$

$$M_g(2) = 0$$

-4-

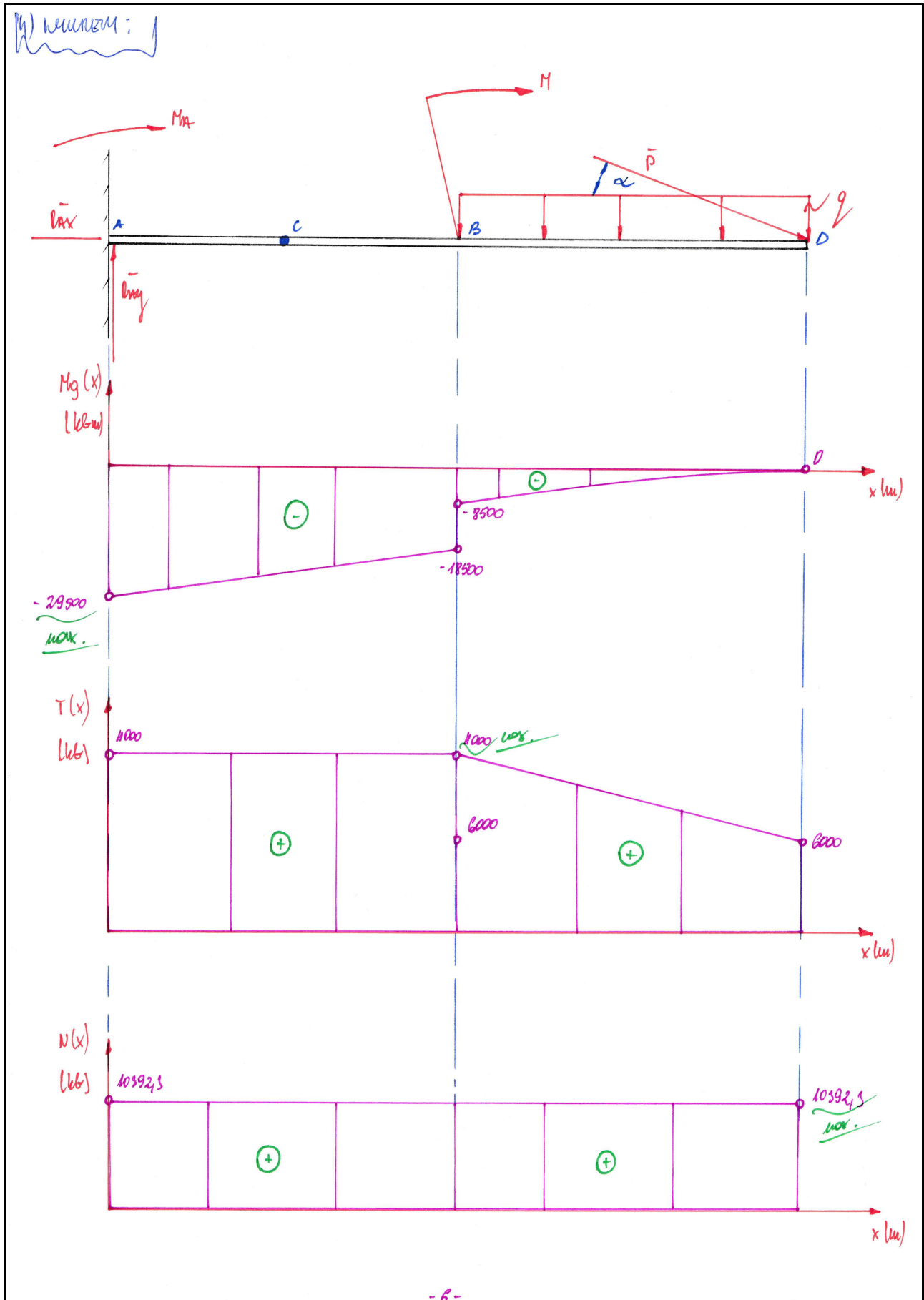
$$T(x_2) = T^I - q_V(x_2 - l) = 11000 - 5000(x_2 - l) =$$
$$= 11000 - 5000x_2 + 5000 = -5000x_2 + 16000$$

$$T(1) = 11000$$

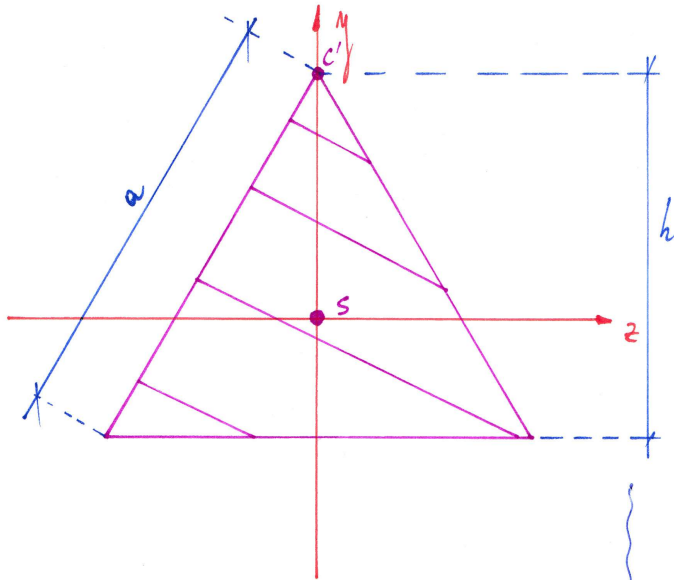
$$T(2) = 6000$$

$$N(x_2) = N^I + 0 = +10382,3$$

$$N(1) = N(2) = 10382,3$$



5) przy pomocy formułek:



$$\delta g = \frac{M_{g \max}}{W_x} \leq k_g$$

$$W_x = \frac{I_{zc}}{y_{\max}}$$

$$\left. \begin{aligned} a &= \text{DŁUGOŚĆ} \\ h^2 &= a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2 \\ h^2 &= a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{4}a^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow I_{zc} = \frac{a \cdot h^3}{36} = \frac{a \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3}{36} = \frac{a \cdot a^3 \cdot \sqrt{3}}{36 \cdot 8} = \frac{\sqrt{3}}{96} a^4$$

$$\Rightarrow I_{zc} = \frac{\sqrt{3}}{96} a^4 = 0,0182 a^4 ; \quad y_{\max} = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow I_{zc} = 0,0182 a^4 ; \quad y_{\max} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow W_x = \frac{I_{zc}}{y_{\max}} = \frac{0,0182 a^4}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \frac{0,0182 a^4 \cdot 3}{a\sqrt{3}} = 0,0101 a^3 \Rightarrow W_x = 0,0101 a^3$$

$$\delta_g = \frac{M_{g_{max}}}{W_x} \leq k_g$$



$$W_x \geq \frac{M_{g_{max}}}{k_g}$$

$$0,04 a^3 \geq \frac{M_{g_{max}}}{k_g} \quad | : 0,04$$

$$a^3 \geq \frac{M_{g_{max}}}{0,04 k_g}$$

$$a \geq \sqrt[3]{\frac{M_{g_{max}}}{0,04 k_g}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{g_{max}} = -29500 \\ |M_{g_{max}}| = |-29500| = 29500 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} M_{g_{max}} = 29500 \text{ (Ncm)} \\ k_g = 1200 \text{ (N/cm}^2\text{)} \end{array} \right.$$

W ZAMIEJANI PODANY WYKAD 760 POZIOM NA WYKAD 5^{ty}

$$1 \text{ (kg)} = 9,81 \text{ (N)}$$

$$1 \text{ (kgm)} = 9,81 \text{ (Nm)}$$

$$29900 \text{ (kgm)} = 289395 \text{ (Nm)}$$

$$1200 \left(\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \right) = 1200 \cdot \frac{9,81}{(0,01)^2} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] = 1178 \cdot 10^5 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_{g \max} = 289395 \text{ (Nm)} \\ k_g = 1178 \cdot 10^5 \text{ (N/m}^2\text{)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a &= \sqrt[3]{\frac{M_{g \max}}{0,031 \text{ kg}}} = \sqrt[3]{\frac{289395}{0,031 \cdot 1178 \cdot 10^5}} = \sqrt[3]{\frac{289395}{36,52 \cdot 10^5}} = \\ &= \sqrt[3]{782,4 \cdot 10^{-4}} = 0,429 \text{ (m)} = 429 \text{ (mm)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = 429 \text{ (mm)}$$

$$\Rightarrow a_{\text{min}} = 450 \text{ (mm)}$$

(6) NAPIĘSIENIE S DŁUGIEM

$$\sigma_{gc}' = \frac{M_{g_{max}}}{W_{xc}'}$$

$$W_{xc}' = W_x$$

$$\rightarrow \sigma_{gc}' = \frac{M_{g_{max}}}{W_{xc}'_{min}} = \frac{289395}{0,031 \cdot (0,45)^3} = \frac{289395}{2,46} \cdot 10^3 = 117,6 \cdot 10^6$$

$$\rightarrow \sigma_{gc}' = 117,6 \text{ (MPa)}$$

7) WZT UGIĘCIA ORAZ WZKŁADKA UGIĘCIA ν PRZ. "C":

$$\left\{ c \in \mathbb{I} \right\}$$

$$EI y'''' = M_g(x)$$

∴

$$M_g(x_1) = 11000 x_1 - 29500$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = 11000 \\ B = -29500 \end{array} \right\} \Rightarrow M_g(x_1) = A x_1 + B$$

$$\Rightarrow M_g(x_1) = EI y'''' = A x_1 + B \quad / \cdot \frac{1}{EI}$$

*oblicz również
wzr. ugięcia
oraz w p.i.*

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1'''' = \frac{1}{EI} (A x_1 + B) \\ y_1''' = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} A x_1^2 + B x_1 + C \right) \\ y_1'' = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{6} A x_1^3 + \frac{1}{2} B x_1^2 + C x_1 + D \right) \end{array} \right.$$

∴ warunki brzegowe:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(x=0) = 0 \\ y_1'(x=0) = 0 \end{array} \right.$$

-4-

⇒ Wzrost wartości siłowania?

$$C, D = ?$$

$$y_1(x=0) = 0$$



$$D = 0$$

$$y_1'(x=0) = 0$$



$$C = 0$$

⇒

$$\begin{cases} C = 0 \\ D = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_1(x_1) = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{6} A x_1^3 + \frac{1}{2} B x_1^2 + C x_1 + D \right)$$

$$I \text{ (kg)} = 9,81 \text{ (N)}$$

$$I \text{ (kgm)} = 9,81 \text{ (Nm)}$$

$$E = 211 \cdot 10^6 \left[\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \right] = 211 \cdot 10^6 \cdot \frac{9,81}{(100)^2} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] = 20,6 \cdot 10^{10} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$$

$$\Rightarrow E = 20,6 \cdot 10^{10} \text{ (N/m}^2\text{)}$$

$$I = 0,0182_{\text{mm}}^4 = 0,018 \cdot (0,43)^4 = 6,15 \cdot 10^{-9} \Rightarrow I = 6,15 \cdot 10^{-9} \text{ (m}^4\text{)}$$

-R-

$$\Rightarrow y_1(x_1) = \frac{1}{2016 \cdot 10^{10} \cdot 615 \cdot 10^{-9}} \cdot (1834 x_1^3 - 14750 x_1^2 + 0 x_1 + 0)$$

$$\Rightarrow y_1(x_1) = \frac{1}{127 \cdot 10^6} \cdot (1834 x_1^3 - 14750 x_1^2)$$

$f(x)$

ROZWIĄZUKIĆ ICI OBLICZĄ
WARTOŚĆ NAJWIĘKSZĄ I
NAJMIEJSZĄ FUNKCJI

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_1\left(x_1 = \frac{1}{2}l\right) &= \frac{l}{127 \cdot 10^6} \cdot (1834 \cdot (0,15)^3 - 14750 \cdot (0,15)^2) = \\ &= \frac{l}{127 \cdot 10^6} \cdot (229,25 - 3281,25) = 7,97 \cdot 10^{-9} \cdot (-3052,00) = \\ &= -24,2 \cdot 10^{-6} \text{ (m)} = -0,0242 \text{ (mm)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y_1\left(x_1 = \frac{1}{2}l\right) = -0,0242 \text{ (mm)}$$

$$\Rightarrow y_i'(x_1) = \frac{P}{EI} \left(\frac{P}{2} A x_1^2 + B x_1 + C \right)$$

$$\Rightarrow y_i'(x_1) = 7,87 \cdot 10^{-8} \cdot (5500 x_1^2 - 28500 x_1)$$

 $\varphi(x)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_i'(x_1 = \frac{1}{2} \text{ m}) &= 7,87 \cdot 10^{-8} \cdot (5500 \cdot (0,17)^2 - 28500 \cdot 0,17) = \\ &= 7,87 \cdot 10^{-8} \cdot (1575 - 14750) = -0,105 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y_i'c = -0,105 \cdot 10^{-3} \text{ (rad.)}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{w} \text{ (rad.)} &= 3,14 \text{ (rad.)} = 180^\circ \\ -0,105 \cdot 10^{-3} \text{ (rad.)} &= z^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow z^\circ = \frac{-0,105 \cdot 10^{-3} \cdot 180}{3,14} = -0,006^\circ$$

$$\Rightarrow z = -0,006^\circ$$

$$\Rightarrow y_i'c = -0,006^\circ$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_c = -0,027 \text{ (mm)} \\ \varphi_c = -0,006^\circ \end{cases}$$

-14-

