SERWIS EDUKACYJNO - INŻYNIERSKI

www.e-MECHANiK.com.pl

MATURA STUDIA PRAKTYKA PRACA

KOMPLEKSOWE WSPARCIE EDUKACYJNE NA KAŻDYM ETAPIE KSZTAŁCENIA INŻYNIERSKIEGO

Matematyka ; Fizyka ; Algebra z geometrią analityczną ; Analiza matematyczna I, II, III ; Mechanika I, II, III ; Mechanika płynów ; Mechanika analityczna ; Mechanika kwantowa ; Mechanika Techniczna ; Wytrzymałość materiałów I, II, III ; Równania różniczkowe ; PKM I, II ; Podstawy konstrukcji maszyn ; TMM ; Teoria mechanizmów i manipulatorów ; AiSUK ; Analiza i synteza układów kinematycznych ; PPM ; Podstawy projektowania mechanizmów (maszyn) ; PPŚT ; Podstawy projektowania środków transportu ; Manipulatory ; Automatyka i robotyka ; Synteza mechanizmów ; Modelowanie układów wieloczłonowych ; Grafika inżynierska 2D i 3D ; maszyny CNC ; konsultacje prac inżynierskich i magisterskich kierunków studiów technicznych ; współpraca z przemysłem.

KURSY INDYWIDUALNE ORAZ GRUPOWO I ON-LINE

email: **kontakt@e-mechanik.com.pl**
web: **www.e-MECHANiK.com.pl**
fb: facebook.com/kontakt.emechanik
tel: **(+48) - 697-154-075**
skype: e-MECHANiK

e-MECHANiK	inż. Szymon Flis	Rybná 716/24	Praha 1 (Staré Město)	Česká Republika	IČO: 06032168	DIČ: CZ684184253	(+48)-697-154-075

inż. Szymon Flis

(+48)-697-154-075

MECHANIKA III

RÓWNANIA LA GRANGE'A II RODZAJU

PROJEKT

Dla zadanego układu brył sztywnych, znaleźć:

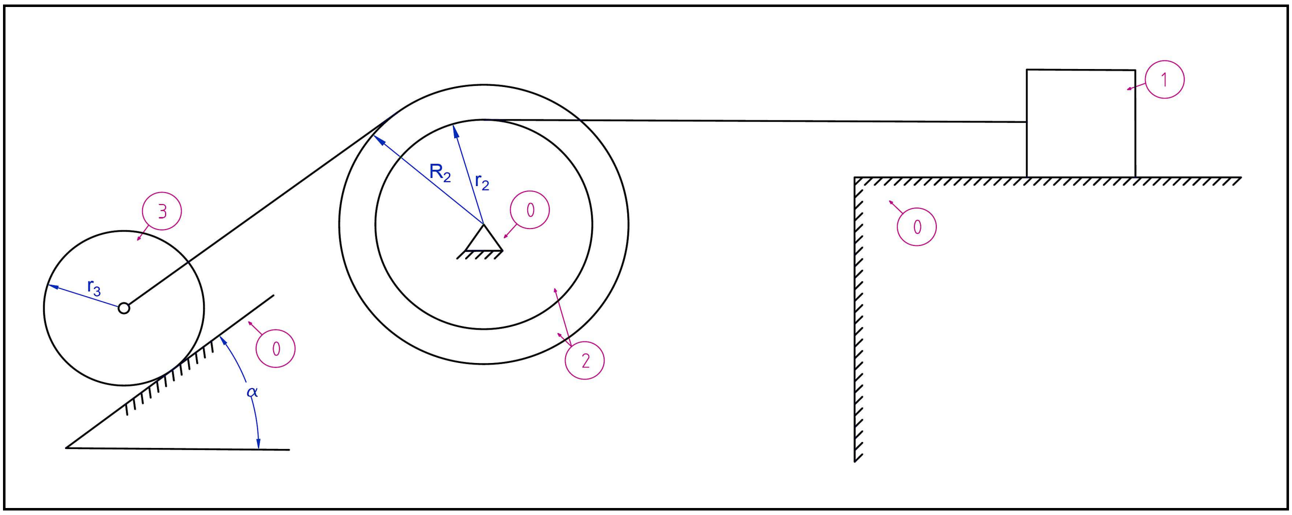
1) Parametry kinematyczne:

- równanie ruchu ciała masowego.
- częstotliwość drgań własnych układu.

DANE

- parametry geometryczne belki.
- masa belki.
- stała sprężyny.
- siła wymuszająca.

Założyć nieważkość i bezmasowość cięgien.



Rys. 1. Dynamika układu brył sztywnych.

ZAD. 2

DANE:

F_0, m, l, k, ω = dane

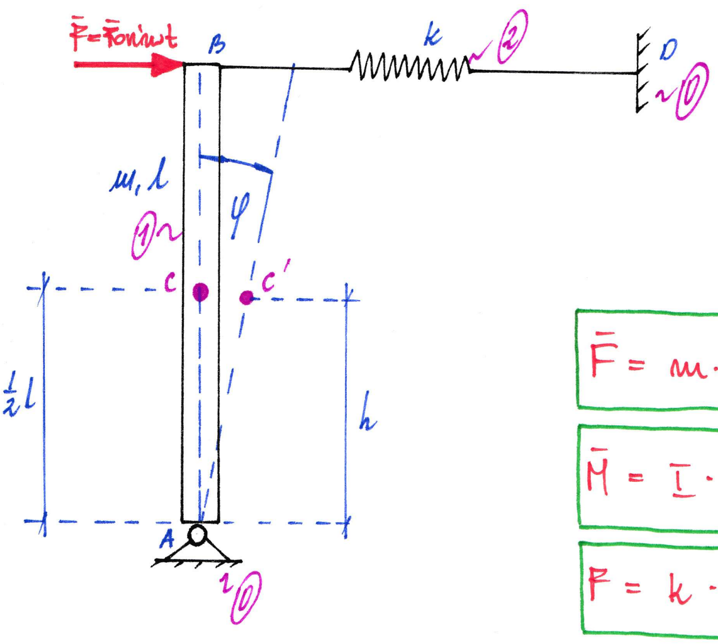
$F = F_0 \sin \omega t$

SZUKAM:

$\varphi(t) = ?$

$\omega_0 = ?$

1) SCHEMAT KINEMATYCZNY UKŁADU:



$$\boxed{\bar{F} = m \cdot \bar{a}}$$

$$\boxed{q = \varphi}$$

$$\boxed{\bar{M} = I \cdot \bar{\varepsilon}}$$

$$\boxed{F = k \cdot x}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\varphi}}\right) - \frac{dL}{d\varphi} = Q}$$

$$\boxed{L = E_k - E_p}$$

-1-

2) RÓWNANIA RUCHU

$$\boxed{L = E_k - E_p}$$

$$\begin{cases} E_k = \frac{1}{2} I_A \dot{\varphi}^2 \\ E_p = \frac{1}{2} k x^2 + mgh \end{cases}$$

$$\boxed{I_C = \frac{1}{12} ml^2} \Rightarrow \boxed{I_A = I_C + m \cdot \left(\frac{1}{2} l\right)^2}$$

$$I_A = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{1}{4} ml^2 = \frac{4}{12} ml^2$$

$$\Rightarrow \boxed{I_A = \frac{1}{3} ml^2}$$

$$\boxed{\frac{h}{\frac{1}{2} l} = \cos\varphi} \Rightarrow \boxed{h = \frac{1}{2} l \cos\varphi}$$

$$\boxed{x = \varphi \cdot l}$$

$$\boxed{dW = M \cdot d\varphi}$$

$$dW = F \cdot l \cdot d\varphi$$

$$\boxed{Q = F \cdot l}$$

-2-

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} E_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m l^2 \cdot \dot{\varphi}^2 \\ E_p = \frac{1}{2} k \cdot (\varphi \cdot l)^2 + mg \cdot \frac{1}{2} l \cos\varphi \end{cases}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{L = \frac{1}{6} m l^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} k (\varphi l)^2 - \frac{1}{2} mgl \cos\varphi}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} \frac{dL}{d\varphi} = -k\varphi l + \frac{1}{2} mgl \sin\varphi \\ \frac{dL}{d\dot{\varphi}} = \frac{1}{3} m l^2 \dot{\varphi} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\varphi}}\right) = \frac{1}{3} m l^2 \ddot{\varphi} \end{cases}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\varphi}}\right) - \frac{dL}{d\varphi} = Q}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{3} m l^2 \ddot{\varphi} + k\varphi l - \frac{1}{2} mgl \sin\varphi = F \cdot l$$

-3-

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3} m l^2 \ddot{\varphi} + k l \varphi - \frac{1}{2} m g l \sin\varphi = F \cdot l$$

$$\left\{ \boxed{\sin\varphi \approx \varphi} \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{3} m l^2 \ddot{\varphi} + k l \varphi - \frac{1}{2} m g l \varphi = F \cdot l$$

$$\frac{1}{3} m l^2 \ddot{\varphi} + l\varphi \left(k - \frac{1}{2} m g\right) = F \cdot l \quad \Big/ \cdot \left(\frac{3}{m l^2}\right)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{3}{m l}\left(k - \frac{1}{2} m g\right) \varphi = \frac{3}{m l} F$$

$$\left\{ \boxed{F = F_0 \sin \omega t} \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \underbrace{\frac{3}{m l}\left(k - \frac{1}{2} m g\right)}_{\omega^2} \varphi = \underbrace{\frac{3}{m l} F_0}_{P} \sin \omega t}$$

$$\left\{ \boxed{\omega^2 = \frac{3}{m l}\left(k - \frac{1}{2} m g\right)} \right\}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\varphi}(t) + \omega^2 \varphi(t) = P \sin \omega t}$$

-4-

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\varphi}(t) + \omega^2 \varphi(t) = P \sin \omega t}$$

$\varphi_j(t)$:)

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\varphi} \rightarrow r^2 \\ \dot{\varphi} \rightarrow r \\ \varphi \rightarrow 1 \end{array} \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{r^2 + \omega^2 = 0}$$

$$r^2 = -\omega^2 \qquad \left\{ \boxed{i^2 = -1} \right\}$$

$$r^2 = i^2 \omega^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_1 = +i\omega \\ r_2 = -i\omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \omega \end{cases}$$

$$\boxed{y_j(x) = e^{\alpha x}(C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x)}$$

$$\Rightarrow \varphi_j(t) = e^{\alpha t}(C_1 \sin \beta t + C_2 \cos \beta t)$$

-5-

$$\Rightarrow \quad \varphi_j(t) = \underbrace{e^{0t}}_{=1}\left(C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t\right)$$

$$\boxed{\varphi_j(t) = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t}$$

$\varphi_p(t)$:

$$\boxed{r(t) = P \sin\omega t}$$

$$\boxed{\begin{cases} \varphi_p(t) = A \sin\omega t + B \cos\omega t \\ \dot{\varphi}_p(t) = A\omega \cos\omega t - B\omega \sin\omega t \\ \ddot{\varphi}_p(t) = -A\omega^2 \sin\omega t - B\omega^2 \cos\omega t \end{cases}}$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = P \sin\omega t}$$

$$\Downarrow$$

$$-A\omega^2 \sin\omega t - B\omega^2 \cos\omega t + \omega^2\left(A \sin\omega t + B \cos\omega t\right) = P \sin\omega t$$

$$-A\omega^2 \cancel{\sin}\omega t - B\omega^2 \cancel{\cos}\omega t + A\omega^2 \cancel{\sin}\omega t + B\omega^2 \cancel{\cos}\omega t = P \sin\omega t$$

$\Rightarrow$ PORÓWNAN
WSPÓŁ.
CZŁONÓW !

-6-

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\varphi_p(t) &= (At+B)\sin\omega t + (Ct+D)\cos\omega t = \\ &= At\sin\omega t + B\sin\omega t + Ct\cos\omega t + D\cos\omega t\end{aligned}}$$

$$\dot{\varphi}_p(t) = A(\sin\omega t + \omega t\cos\omega t) + \omega B\cos\omega t$$

$$+ C(\cos\omega t - \omega t\sin\omega t) - \omega D\sin\omega t =$$

$$= \boxed{\begin{aligned}&A\sin\omega t + A\omega t\cos\omega t + B\omega\cos\omega t + C\cos\omega t \\ &- C\omega t\sin\omega t - D\omega\sin\omega t\end{aligned}}$$

$$\ddot{\varphi}_p(t) = \omega A\cos\omega t + A\omega(\cos\omega t - \omega t\sin\omega t) - B\omega^2\sin\omega t$$

$$-\omega C\sin\omega t - C\omega(\sin\omega t + \omega t\cos\omega t) - D\omega^2\cos\omega t =$$

$$= \underline{A\omega\cos\omega t} + \underline{A\omega\cos\omega t} - A\omega^2 t\sin\omega t - B\omega^2\sin\omega t$$

$$- \underline{\underline{C\omega\sin\omega t}} - \underline{\underline{C\omega\sin\omega t}} - C\omega^2 t\cos\omega t - D\omega^2\cos\omega t =$$

$$= \boxed{\begin{aligned}&2A\omega\cos\omega t - A\omega^2 t\sin\omega t - B\omega^2\sin\omega t \\ &- 2C\omega\sin\omega t - C\omega^2 t\cos\omega t - D\omega^2\cos\omega t\end{aligned}}$$

- 4 -

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = P\sin\omega t}$$

$$\Downarrow$$

$$2A\omega\cos\omega t - \cancel{A\omega^2 t\sin\omega t} - \cancel{B\omega^2\sin\omega t} - 2C\omega\sin\omega t$$
$$- \cancel{C\omega^2 t\cos\omega t} - \cancel{D\omega^2\cos\omega t} + \cancel{A\omega^2 t\sin\omega t} + \cancel{B\omega^2\sin\omega t}$$
$$+ \cancel{C\omega^2 t\cos\omega t} + \cancel{D\omega^2\cos\omega t} = P\sin\omega t$$

$$\Rightarrow \quad 2A\omega\cos\omega t - 2C\omega\sin\omega t = P\sin\omega t$$

$$\boxed{-2C\omega\sin\omega t + 2A\omega\cos\omega t = P\sin\omega t}$$

$$\boxed{\begin{cases} -2C\omega = P \\ 2A\omega = 0 \end{cases}} \qquad \boxed{\begin{cases} B = 0 \\ D = 0 \end{cases}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = -\dfrac{P}{2\omega} \\ D = 0 \end{cases}}$$

- 8 -

$$\Rightarrow \quad \varphi_p(t) = (0t + 0)\sin\omega t + \left(-\frac{P}{2\omega} + 0\right)\cos\omega t$$

$$\boxed{\varphi_p(t) = -\frac{P}{2\omega}\cos\omega t}$$

$$\boxed{\varphi(t) = \varphi_j(t) + \varphi_p(t)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\varphi(t) = C_1\sin\omega t + C_2\cos\omega t - \frac{P}{2\omega}\cos\omega t}$$

$$\boxed{\dot{\varphi}(t) = \omega C_1\cos\omega t - \omega C_2\sin\omega t + \frac{1}{2}P\sin\omega t}$$

$$\boxed{\begin{cases} \varphi(t=0) = \varphi_0 \\ \dot{\varphi}(t=0) = \dot{\varphi}_0 \end{cases}} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} C_2 - \frac{P}{2\omega} = \varphi_0 \\ \omega C_1 = \dot{\varphi}_0 \end{cases}} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} C_1 = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega} \\ C_2 = \varphi_0 + \frac{P}{2\omega} \end{cases}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\varphi(t) = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega}\sin\omega t + \left(\varphi_0 + \frac{P}{2\omega}\right)\cos\omega t - \frac{P}{2\omega}\cos\omega t}$$

- 9 -


inż. Szymon Flis

